Collège Jean TABI d'Etoudi
Département de maths
BP 4174-Yaoundé
Tél/Fax : 222.21.60.53
N/Réf : CJT/23-24/DH/HVN/CSM

Année scolaire 2023-2024
Période n°6
Classe : T^{le} C
Durée : 4H
Coef. : 7

DEVOIR HARMONISE DE MATHEMATIQUES DU 03/05/2024

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Exercice 1 : (5 points)

L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(1;0;2)$, $B(3;1;2)$, $C(0;-2;-1)$ et $D(2;-2;3)$; f est l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que : $x'=\frac{1}{3}(-2x-2y+z+3)$; $y'=\frac{1}{3}(-2x+y-2z+6)$ et $z'=\frac{1}{3}(x-2y-2z+9)$

1. Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, puis calculer le volume du tétraèdre ABCD. (1 pt)
2. (P) est le plan d'équation : $x-2y+z-3=0$ et (D) la droite d'équation : $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$.
   a) Démontrer que (P) et (D) sont perpendiculaires et préciser les coordonnées de leur point d'intersection Ω. (1 pt)
   b) Ecrire l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ de plan (P). (0,5 pt)
   c) Montrer f est le demi-tour d'axe (D). (0,75 pt)
   d) Déterminer et caractériser l'application : $S_{(P)} \circ f$. (0,25 pt)
3. Désignons par W l'espace vectoriel dont une base est $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit φ l'endomorphisme de W tel que : $\varphi(\vec{\imath})=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$; $\varphi(\vec{\jmath})=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$ et $\varphi(\vec{k})=-2\varphi(\vec{\imath})$. On pose : $\vec{e_1}=2\vec{\imath}+\vec{k}$, $\vec{e_2}=\vec{\imath}+\vec{k}$ et $\vec{e_3}=2\vec{\jmath}$
   a) Montrer que $ker\varphi$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{e_1}$. (0,5 pt)
   b) Montrer que $Im\varphi$ est le plan vectoriel dont une base est : $(\vec{e_2},\vec{e_3})$. (0,5 pt)
   c) Ecrire la matrice de φ dans la base $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. (0,5 pt)

Exercice 2 : (5 points)

a et b étant deux entiers relatifs, on considère dans le plan complexe $(\mathcal{P})$, l'ensemble $\Gamma_{(a;b)}$ des points M d'affixes $z=x+iy$ tels que : $ax^2+by^2+2x+1=0$ et Ψ est l'application de $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=(a+bi)z-ai$.

1. M, M' et M'' étant des points de $(\mathcal{P})$ d'affixes respectives z, z^2 et z^5. (avec $z\neq 0$ et $z\neq 1$)
   a) Montrer que M, M' et M'' sont alignés si et seulement si : $\frac{z^4-1}{z-1}\in\mathbb{R}$. (0,5 pt)
   b) En déduire une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M(z) tels que M, M' et M'' soient alignés. (0,5 pt)
2. Déterminer l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation : $2x-5y=11$. (0,75 pt)
3. On suppose que $(a;b)\in S$.
   a) Justifier que Ψ n'est pas une rotation. (0,75 pt)
   b) Montrer que $\Gamma_{(a;b)}$ est une hyperbole si et seulement si $a=3$ et $b=-1$. (0,75 pt)
   c) Déterminer les éléments caractéristiques puis, construire $\Gamma_{(3;-1)}$. (1,75 pt)

Exercice 3 : (5 points)

n étant un entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle (E_n): $y'+y=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. g et h sont deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}\ g(x)=h(x)e^{-x}$.

a) Montrer que g vérifie $(\mathrm{E_n})$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}\ h'(x) = \frac{x^n}{n!}$. (0,5 pt)

b) En déduire une solution g de $(\mathrm{E_n})$. (0,5 pt)

2. On pose, pour tout réel x, $f_0(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = xe^{-x}$.

a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$. (0,25 pt)

b) On définit la fonction f_n comme la solution de l'équation : $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

Montrer par récurrence que, $\forall x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel non nul : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$. (1 pt)

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $\mathrm{I_n} = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que $\forall x \in [0;1], 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$. (0,5 pt)

b) Montrer que $0 \leq \mathrm{I_n} \leq \frac{1}{(n+1)!}$ puis en déduire la limite de la suite $(\mathrm{I_n})$. (0,75 pt)

c) Montrer que pour tout entier naturel k non nul on a : $\mathrm{I_k} - \mathrm{I_{k-1}} = -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$. (0,5 pt)

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I_n} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. (0,75 pt)

e) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. (0,25 pt)

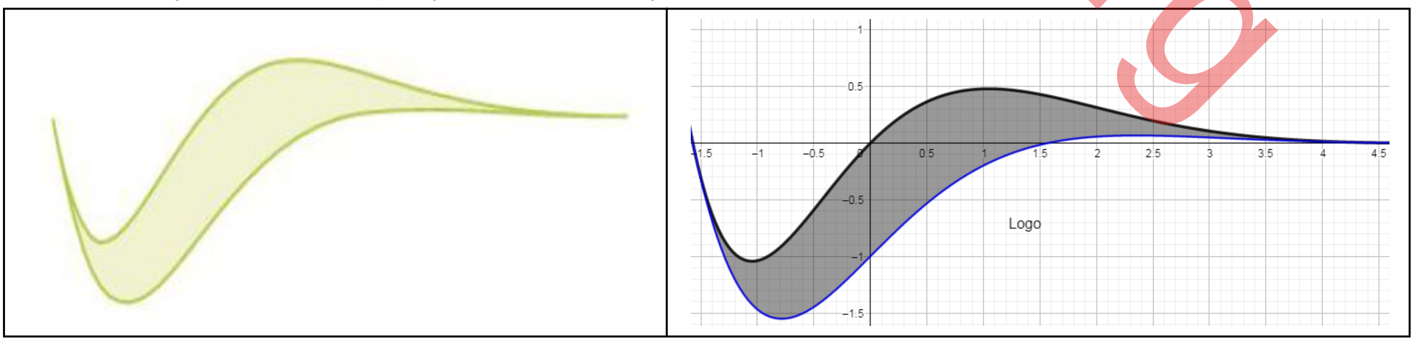
Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES (5points)

Situation :

La directrice du marketing d'une grande entreprise doit concevoir une campagne publicitaire pour le lancement d'un nouveau produit sur le marché et s'interroge sur la durée de cette campagne. Une enquête a permis de modéliser la situation de la façon suivante : La probabilité qu'une personne connaisse le produit après n semaines de publicité est $\mathrm{p(n)} = \frac{5n}{6n+30}$; Si une personne connait le produit après n semaines, la probabilité qu'elle l'achète est 0,7 ; Si une personne ne connait pas le produit, la probabilité qu'elle l'achète est 0,2. La directrice décide de cesser la campagne dès lors que la probabilité qu'une personne interrogée au hasard achète le produit est supérieure à 0,5.

Par ailleurs, l'entreprise sollicite les services d'un sérigraphe pour la fabrication de 30 banderoles identiques à placer en différents carrefours de la ville, celles-ci doivent être estampillées du logo de l'entreprise (représenté ci-dessous) dessiné à l'aide des courbes des fonctions f et g définies sur $\left[-\frac{3}{2};4\right]$ par : $\mathrm{f(x)} = -\mathrm{e^{-x}cos(x)}$ et $\mathrm{g(x)} = \mathrm{e^{-x}(-cos(x) + sin(x) + 1)}$, dans un repère orthonormé d'unité 1 m. La surface intérieure du logo devant être laquée d'une substance dont la quantité nécessaire pour 10 dm^2 coûte 1000 frs.

Cette entreprise fabrique au maximum 400 objets d'un certain type par jour. Le coût de production C en millions de francs est définie sur $[0;40]$ par : $C(x) = -\frac{1}{10}(x + x^2)e^{-0,05x} + x$ où x désigne le nombre de dizaines d'objets fabriqués par jour ; chaque objet étant vendu à 45000 frs.



Tâches : (1,5 pt × 3)

1. Combien de jours durera la campagne publicitaire ?
2. Déterminer le nombre minimum d'objets que l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice
3. Quelle somme minimale dépensera cette entreprise pour la fabrication des banderoles publicitaires?

Présentation : 0,5 pt